$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x - x = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$ . Et comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite D : $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de $f(x)+x$ :

$f(x)+x = \frac{\ln x}{x}$ , le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est celui de $\text{Log}\, x$.

Donc :

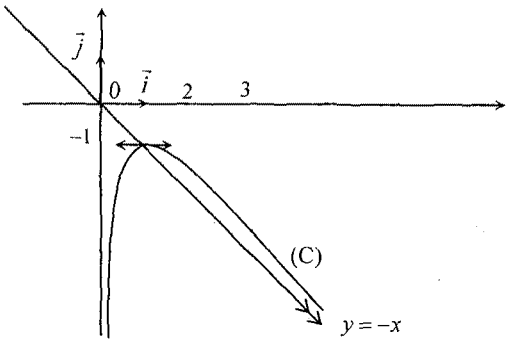
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'où : • sur $]0,1[$, (C) est au dessous de D

• sur $]1,+\infty[$ , (C) est au dessus de D

• au point d'abscisse 1, (C) et D se coupent.

3°/




**Solution 5 :**

1°/ $g$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$ ,

$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$